

TD 26 : Dimension des espaces vectoriels

Famille libre, génératrice, bases en dimension finie

Exercice 1.

1) Est-ce que $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 66 \\ 65 \\ -55 \\ 729 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ e^{-6} \\ \ln 5 \\ \tan(e) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{\text{ch}2} \\ \arcsin 1 \\ \arctan 3 \\ \text{th}(\pi)^{-\frac{1}{\pi}} \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de \mathbb{R}^4 ?

2) Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

3) Est-ce que $\mathcal{F} = (X^3 - X^2, X^2 - X, X - 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n . Soit P_0, \dots, P_n des polynômes de E tels que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \deg P_k = k$.

1) Montrer que (P_0, \dots, P_n) est libre.

2) En déduire que c'est une base de E .

Exercice 3. On pose $\mathcal{F} = ((1, -1, -1), (3, 3, 1), (2, 4, 2))$ et $G = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

1) Montrer que \mathcal{F} est liée. Que peut-on en déduire sur la dimension de G ?

2) Déterminer trois bases différentes de G .

Dimension, supplémentaires

Exercice 4. On définit le s.e.v. suivant de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$$

1) Déterminer la dimension de F .

2) Trouver un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 5. On considère les s.e.v. suivants de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + z = 0\} \quad G = \text{Vect}((0, 1, -1))$$

1) Déterminer une base de F et une base de G .

2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 6. On considère les s.e.v. suivants de \mathbb{R}^3 :

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \right\} \quad G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

1) Déterminer une base de F et une base de G .

2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 7. Soit F, G deux s.e.v. de \mathbb{R}^5 de dimension 3. Montrer que F et G ne sont pas en somme directe.

Exercice 8. On considère la famille de 3 vecteurs

$$u = (1, 1, -1) \quad v = (1, -1, 1) \quad w = (-1, 1, 1)$$

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ selon la base \mathcal{B} .

Exercice 9. On définit les s.e.v. suivants

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\}$$

- 1) Déterminer la dimension de F ainsi qu'une base de F .
- 2) Même question pour G .
- 3) Même question pour $F \cap G$.
- 4) Même question pour $F + G$.

Exercice 10. Soit E un e.v. de dimension $n \geq 1$, G, H deux s.e.v. de dimension $n - 1$ distincts.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(G + H)$?
- 2) En déduire $G + H$, puis la dimension de $G \cap H$.

Exercice 11. On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & x-y \\ x+y & 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que E est un e.v. et déterminer la dimension de E .

Exercice 12 (Dimensions de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$). Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Rappeler quelle est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2) Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ construite à partir de matrices de la question 1.
- 3) En déduire une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, puis sa dimension.
- 4) Reprendre les questions 2 et 3 pour $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 13. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. En déduire celle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. *Indication* : on pourra admettre ici (ou bien le démontrer) que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 14 (*). Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est un espace de dimension infinie.

Exercice 15 (*). Soit E un e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F, G deux s.e.v. de même dimension $p < n$.

- 1) On suppose que $p = n - 1$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, i.e. qu'il existe un s.e.v. H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.
- 2) En déduire le résultat pour p quelconque par récurrence descendante sur p .